

FLAMBAGEM

Definição de Flambagem

Denomina-se **flambagem** a perda de estabilidade de um corpo sollicitado, caracterizada pelo aparecimento de deformações, a princípio, incompatíveis com o estado de tensão.

Após o surgimento das deformações inusitadas, o corpo converge rapidamente ao estado de ruptura, sob um pequeno acréscimo da sollicitação.

Exemplos:

a) Barra Comprimida: deformações típicas da torção e da flexão

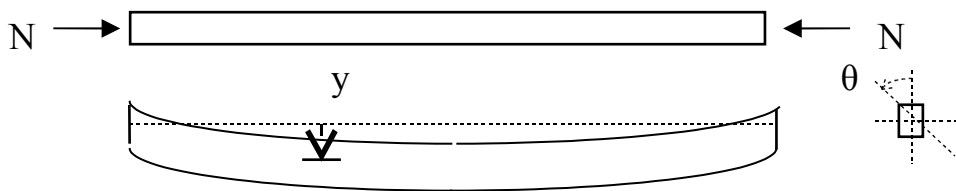


Figura 01

b) Barra Torcida: deformações típicas da flexão

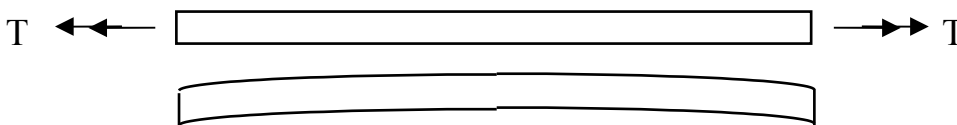


Figura 02

c) Barra Fletida: deformações típicas da torção associadas às de flexão fora do plano de carregamento (flexão lateral)



Figura 03

Observa-se que a flambagem ocorre somente quando o corpo está submetido a tensões normais de compressão.

Conclusão: Não há flambagem se as tensões nas seções transversais de uma barra são só de tração.

O estudo da flambagem é muito extenso. Estudaremos, aqui, apenas os casos de maior interesse prático:

- a) Flambagem de Barras Comprimidas
- b) Flambagem de Barras Fletidas
- c) Flambagem de Chapas Comprimidas e Fletidas

Tipos de Flambagem:

- a) Flambagem por Flexão: a barra apresenta deformações típicas da flexão;
- b) Flambagem por Torção: a barra apresenta deformações típicas da torção;
- c) Flambagem por Flexo-Torção (caso geral): a barra apresenta, simultaneamente, deformações típicas da flexão e da torção.

Observação: Dependendo do tipo de solicitação, de seção transversal e dos vínculos (apoios) da barra, pode ocorrer qualquer dos três tipos de flambagem.

A flambagem pode ainda ser *elástica* ou *inelástica*. A primeira ocorre sob tensões inferiores ao limite de proporcionalidade σ_p do material. A segunda, sob tensões superiores a este limite. O comportamento dos corpos na flambagem elástica difere do comportamento na flambagem inelástica. Portanto, o estudo da flambagem deve ser feito separadamente para cada caso.

Denominaremos σ_{cr} a tensão normal de compressão sob a qual a barra "flamba" - *tensão crítica de flambagem*.

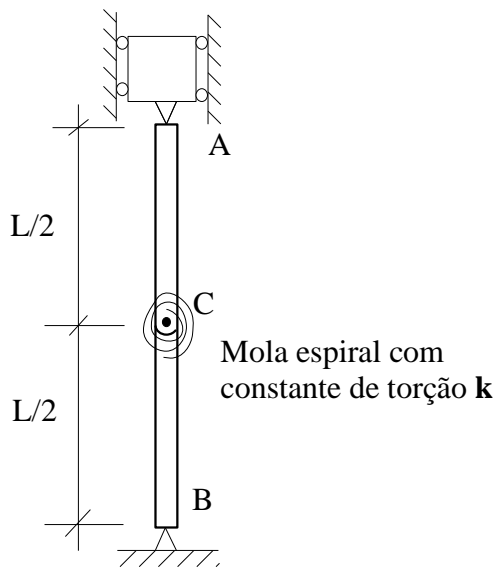
Se $\sigma_{cr} \leq \sigma_p \Rightarrow$ flambagem elástica

Se $\sigma_{cr} > \sigma_p \Rightarrow$ flambagem inelástica

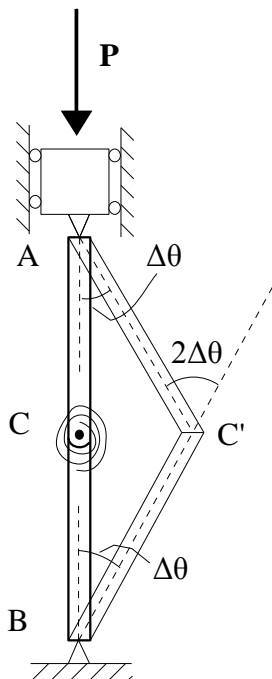
Método Clássico para a Análise da Flambagem:

- 1) Considera-se inicialmente o sistema sem as deformações incompatíveis;
- 2) Introduce-se arbitrariamente uma deformação incompatível, porém observada no fenômeno da flambagem;
- 3) Analisa-se o sistema assim modificado, no sentido de se determinar os esforços que provocariam o fenômeno teoricamente inusitado.

Para melhor compreensão do fenômeno, consideremos o modelo:

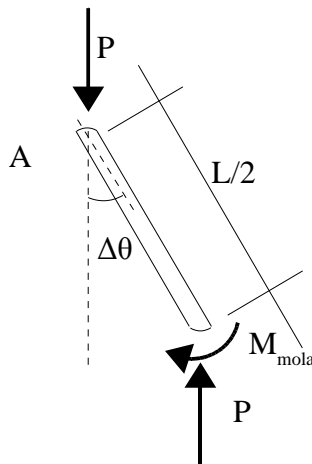


Para uma determinada força P as barras AC e BC continuam alinhadas. Imaginemos que seja dado um deslocamento no ponto C, de tal forma que a barra BC e a barra AC formem um pequeno ângulo ($\Delta\theta$) com a vertical.



Nestas condições, o sistema voltará à sua posição inicial de equilíbrio ou continuará se movendo com o ponto C' se afastando do ponto C. No primeiro caso o equilíbrio é estável e no segundo, instável.

Analisemos a barra AC



o momento provocado pelas forças P tendem a afastar a barra de sua posição inicial (alinhadas entre si) enquanto que o momento M_{mola} tende a levar as barras de volta à sua posição inicial.

$$M_{PP} \frac{P \cdot L}{2} \cdot \text{sen } \theta \quad \text{e} \quad M_{mola} = k \cdot 2 \cdot \Delta \theta$$

Se $M_{PP} > M_{mola}$ a barra se afasta da posição vertical e o sistema é **instável**.

Se $M_{PP} < M_{mola}$ a barra tente a voltar à posição inicial e o sistema é **estável**.

O valor da força P para o qual os momentos se igualam é chamado de “**carga crítica**”

$$\frac{P_{cr} \cdot L}{2} \cdot \text{sen } \Delta \theta = k \cdot 2 \Delta \theta \quad \text{se,}$$

$$P < P_{cr} \rightarrow \text{sistema estável}$$

$$P > P_{cr} \rightarrow \text{sistema instável}$$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot k}{L} \cdot \frac{\Delta \theta}{\text{sen } \Delta \theta}$$

Como $\Delta \theta$ é pequeno, $\text{sen } \Delta \theta \approx \Delta \theta$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{4 \cdot k}{L}}$$

Imaginemos agora $P > P_{cr}$

Neste caso, o sistema se afasta da vertical e atinge, após algumas oscilações, uma nova configuração de equilíbrio para algum valor de θ .

$$\frac{P \cdot L}{2} \cdot \text{sen } \theta = k \cdot 2 \theta$$

$$\frac{P \cdot L}{4 \cdot k} = \frac{\theta}{\text{sen } \theta}$$

se θ é positivo, então $\text{sen } \theta < \theta$, o que resulta em

$$\frac{P \cdot L}{4 \cdot k} > 1 \rightarrow \boxed{P > P_{cr}}$$

Flambagem de Barras Comprimidadas

Flambagem por Flexão

Flambagem Elástica - Problema de Euler (séc. XVIII):

A) Barra Birrotulada:

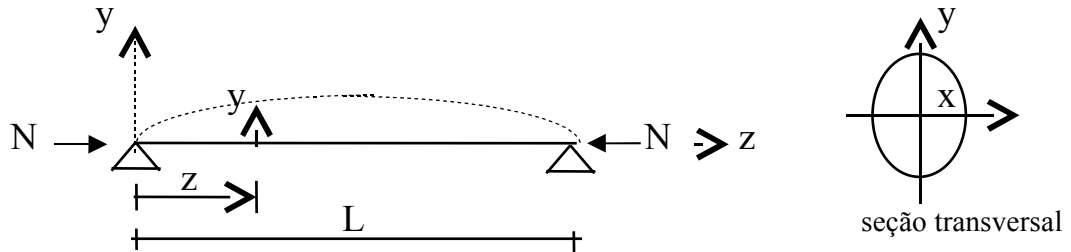


Figura 04

Consideramos, inicialmente, o sistema sem deformações incompatíveis com o estado de tensão. A seguir, introduzimos deformações típicas da flexão (flecha y). O eixo de flexão é, portanto, o eixo x . A equação diferencial da linha elástica, então, é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

onde ρ é o raio de curvatura da linha elástica ($1/\rho$ é a curvatura)

$M_x = -N \cdot y$ é o momento fletor numa seção genérica distante z do apoio esquerdo

$E \cdot I_x$ é a rigidez à flexão relativa ao eixo de flexão x

A curvatura $1/\rho$ é dada por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y'' ,$$

se as deformações são pequenas (y'^2 é desprezível na presença da unidade).

Assim, temos

$$y'' = \frac{-N \cdot y}{E \cdot I_x} = -k^2 \cdot y \quad \text{ou} \quad y'' + k^2 \cdot y = 0 ,$$

onde $k^2 = \frac{N}{E \cdot I_x}$.

A solução desta equação é

$$y = C_1 \cdot \text{sen}(k \cdot z) + C_2 \cos(k \cdot z) ,$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

A obtenção destas constantes é feita através das condições de contorno do problema que são, no caso, condições de apoio da viga, isto é:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ y = 0 \quad \text{em} \quad z = L &\Rightarrow C_1 \sin(kL) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ ou } kL = n\pi \\ &\text{onde } n \text{ é um inteiro} \end{aligned}$$

Da primeira solução, $C_1 = 0$, concluímos que $y = 0$ e, portanto, a barra não flete. Esta solução não nos interessa. Contradiz o pressuposto.

Da segunda, $k \cdot L = n \cdot \pi$, concluímos que $k = \frac{n \cdot \pi}{L}$. De $k^2 = \frac{N}{E \cdot I_x}$ e $k = \frac{n \cdot \pi}{L}$, concluímos que

$$N = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_x}{L^2}$$

são as cargas de compressão que provocam a flambagem por flexão numa barra birrotulada.

A carga mínima ($n = 1$) é a carga de interesse prático e é denominada *Carga Crítica de Flambagem Elástica*, já que consideramos, na dedução, o regime elástico. Assim,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{L^2}$$

Conclusões:

- quanto mais rígida a barra, maior será N_{cr} ($N_{cr} \sim E \cdot I_x$) e, portanto, menos susceptível é a barra à flambagem;
- a flexão se dará no plano de menor inércia (N_{cr} será tão menor quanto for I_x); logo, $I_x = I_{min}$ (momento de inércia mínimo da seção);
- quanto maior o comprimento da barra, menor será N_{cr} e, portanto, mais susceptível é a barra à flambagem.

Destas conclusões podemos definir um índice para medir a susceptibilidade da barra à flambagem:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min} \cdot A}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot r_{min}^2}{L^2},$$

onde $r_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ é o raio de giração mínimo da seção.

A carga crítica fica, então,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} ,$$

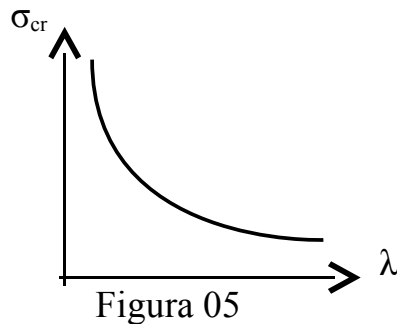
onde $E \cdot A$ é a rigidez axial da barra e $\lambda = \frac{L}{r_{min}}$ é o chamado *índice de esbeltez* da barra.

O índice de esbeltez λ mede a susceptibilidade à flambagem pois quanto maior o comprimento da barra e menor o raio de giração da seção, mais esbelta será a barra e, naturalmente, maior será λ .

A *tensão crítica de flambagem elástica* da barra será

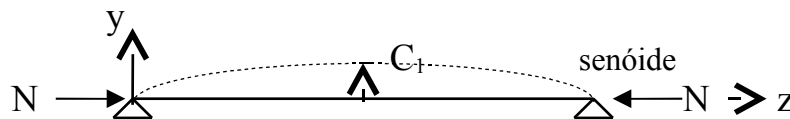
$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2}}$$

Assim, a curva σ_{cr} x λ é uma hipérbole.



Observação: A equação da deformada é $y = C_1 \cdot \text{sen}(kz) = C_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right)$

Em $z = \frac{L}{2}$, $y = C_1 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2} = C_1$ = flecha máxima



B) Caso Geral (quaisquer condições de apoio):

A equação diferencial da linha elástica será

$$y'' + k^2 \cdot y = f_1(z) ,$$

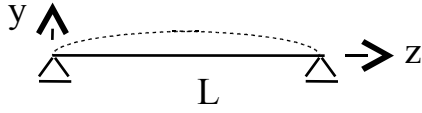
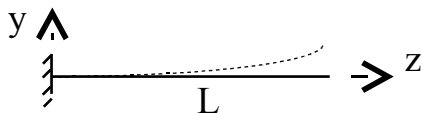
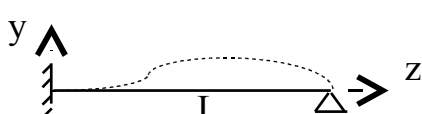
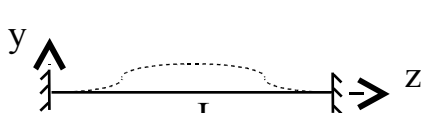
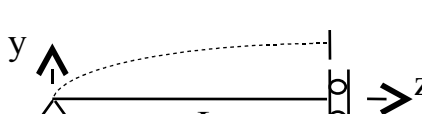
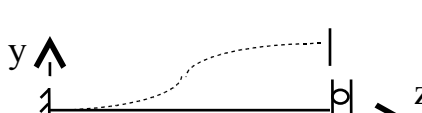
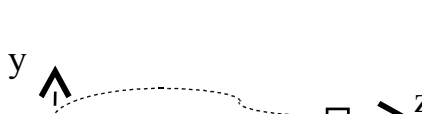

cuja solução será

$$y = C_1 \cdot \text{sen}(kz) + C_2 \cos(kz) + f_2(z) ,$$

onde $f_1(z)$ e $f_2(z)$ dependem das condições de apoio (reações de apoio) da viga.

FLAMBAGEM

Para as diversas possibilidades de apoio temos as seguintes condições de contorno:

- a)  $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ em } z = 0 \\ y = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- b)  $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ em } z = 0 \\ y' = 0 \text{ em } z = 0 \quad (y' = \text{rotação}) \end{array} \right.$
- c)  $\left\{ \begin{array}{l} y = y' = 0 \text{ em } z = 0 \\ y = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- d)  $\left\{ \begin{array}{l} y = y' = 0 \text{ em } z = 0 \\ y = y' = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- e)  $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ em } z = 0 \\ y' = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- f)  $\left\{ \begin{array}{l} y = y' = 0 \text{ em } z = 0 \\ y' = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- g)  $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ em } z = 0 \\ y = y' = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$
- h)  $\left\{ \begin{array}{l} y = y' = 0 \text{ em } z = 0 \\ y = y' = 0 \text{ em } z = L \end{array} \right.$

Resolvendo para cada conjunto, temos:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} ,$$

onde

$$\lambda = \frac{L_{fl}}{r_{min}} ,$$

$L_{fl} = K \cdot L$ é o comprimento de flambagem da barra e
 K é o parâmetro de flambagem da barra.

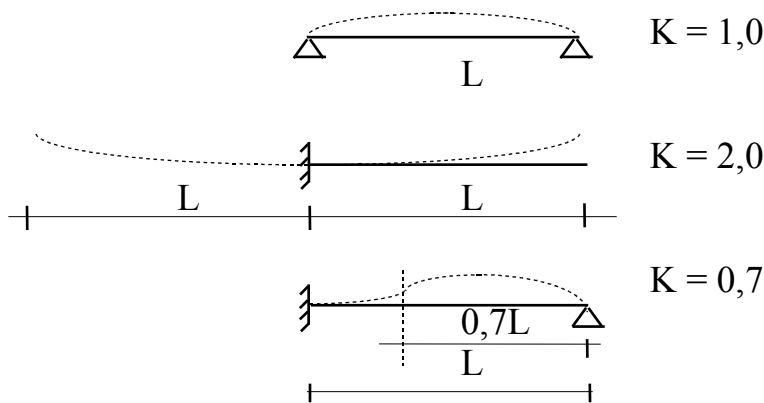
Valores de K:

Condições de Apoio - Caso	Valor de K
a	1,0
b	2,0
c	0,7
d	0,5
e	2,0
f	1,0
g	0,7
h	0,5

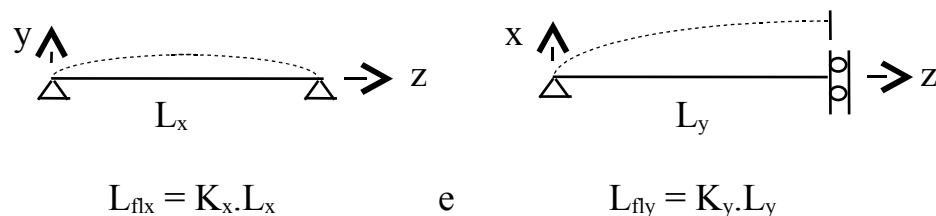
Notar que para as barras deslocáveis (casos b, e, f), $K \geq 1$ e para as barras indeslocáveis (casos a, c, d, g, h), $K \leq 1$.

O valor de K é, na verdade, o percentual do comprimento L da barra, correspondente a uma senóide.

Ex.:



Observação: Concluimos, no estudo da barra birrotulada que a flexão se dará no plano de menor inércia. Porém, se as condições de apoio nos planos principais forem diferentes, isto pode não ocorrer.



Como $K_x \neq K_y$, então $L_{flx} \neq L_{fly}$.

Os índices de esbeltez para flexão em torno de cada eixo serão

$$\lambda_x = \frac{L_{flx}}{r_x} \quad e \quad \lambda_y = \frac{L_{fly}}{r_y} \quad \text{onde}$$

FLAMBAGEM

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad e \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

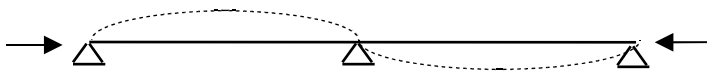
A tensão crítica de flambagem elástica será

$$\sigma_{cr} = f_{ex} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_x^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_{cr} = f_{ey} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2} .$$

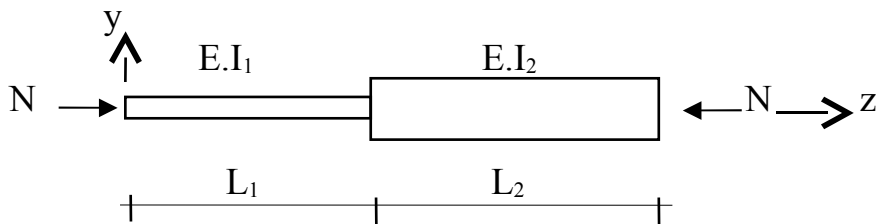
A tensão crítica será a menor entre f_{ex} e f_{ey} , isto é, será a tensão correspondente ao maior índice de esbeltez, que não necessariamente corresponde ao plano de menor inércia se $L_{flx} \neq L_{fly}$.

Observações Complementares:

a) Em vigas contínuas, a deformada, na flambagem, tem o seguinte aspecto:



b) Se a inércia da barra varia, temos:



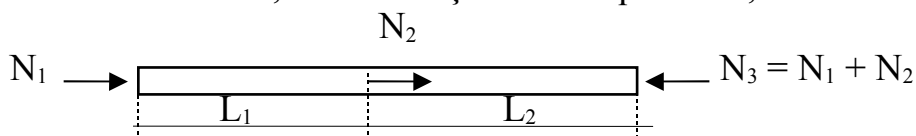
$$y'' + k_1^2 \cdot y_1 = 0 \quad \text{em} \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad \text{onde} \quad k_1^2 = \frac{N}{E \cdot I_1}$$

$$y'' + k_2^2 \cdot y_2 = 0 \quad \text{em} \quad L_1 \leq z \leq L_1 + L_2 \quad \text{onde} \quad k_2^2 = \frac{N}{E \cdot I_2}$$

e, além das condições de contorno já vistas, teremos:

$$y_1 = y_2 \quad e \quad y_1' = y_2' \quad \text{em} \quad z = L_1$$

Se, ao invés da inércia, for o esforço normal que varia, temos solução análoga:

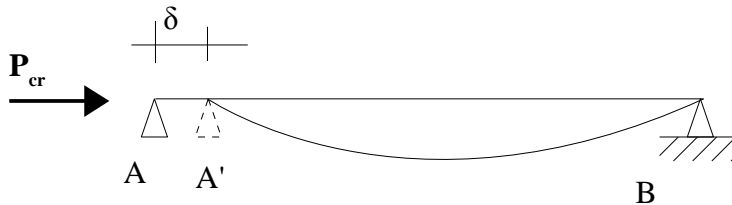


$$k_1^2 = \frac{N_1}{E \cdot I} \quad e \quad k_2^2 = \frac{N_3}{E \cdot I}$$

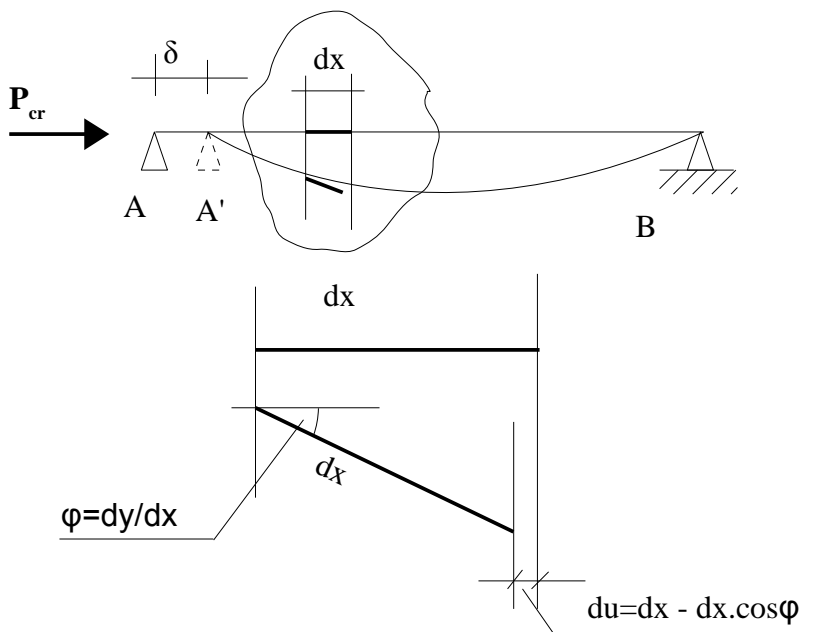
Método de energia para determinar a carga crítica

Seja a barra bi-rotulada abaixo, submetida à carga crítica P_{cr} .

Ao ocorrer a flambagem, o apoio A sofrerá um deslocamento δ e a barra sofrerá flexão. A energia cedida pela carga crítica ao sistema será $P_{cr} \cdot \delta$ será absorvida pela barra em forma de energia potencial de deformação.



– cálculo do deslocamento δ



$$\delta = \int_0^L du$$

$$du = dx \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \varphi^2$$

$$du = \frac{1}{2} \cdot dx \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\delta = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot (y')^2 \cdot dx$$

Energia de deformação (flexão da barra):

$$U_1 = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx$$

quando o ponto A se desloca para o ponto A', a força P_{cr} realiza o trabalho $U_2 = P_{cr} \cdot \delta$

se $U_2 < U_1$ o equilíbrio é estável

se $U_2 > U_1$ o equilíbrio é instável

a flambagem ocorre quando em que $U_1 = U_2$

assim,

$$P_{cr} \delta = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx$$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \cdot (y')^2 \cdot dx}$$

ou, fazendo $y'' = \frac{M}{E \cdot I}$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{E \cdot I}{E \cdot I} \cdot dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \cdot (y')^2 \cdot dx}, \text{ assim } P_{cr} = \frac{\int_0^L E \cdot I \cdot (y'')^2 \cdot dx}{\int_0^L (y')^2 \cdot dx}$$

Desta forma, a carga crítica é calculada a partir do conhecimento da equação da linha elástica da barra em questão. Se esta equação não é conhecida o problema pode ser resolvido de forma aproximada a partir de uma equação da linha elástica que se aproxime da teoricamente exata. Obviamente, tal equação deverá atender, no mínimo, às condições do contorno (condições de extremidade da barra) do problema.

Exemplos

1 - Calcular a carga crítica para uma barra bi-rotulada de seção constante
equação da linha elástica (calculada anteriormente – problema de Euler)

$$y = A \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi \cdot x}{L} \right), \text{ então } y' = A \cdot \frac{\pi}{L} \cos \left(\frac{\pi \cdot x}{L} \right) \text{ e } y'' = -A \cdot \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{\pi \cdot x}{L} \right)$$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L E \cdot I \cdot (y'')^2 \cdot dx}{\int_0^L (y')^2 \cdot dx} = P_{cr} = \frac{E \cdot I \cdot \int_0^L A^2 \cdot \left(\frac{\pi^2}{L^2} \right) \cdot dx}{\int_0^L A^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \cdot dx}$$

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{L^2}$$

se a função y não é conhecida, então deve-se partir para uma solução aproximada admitindo-se uma função $y=f(x)$ que atenda às condições de extremidade.

exemplo 2: calcular a carga crítica da barra bi-rotulada admitindo a função $y = A \cdot x \cdot (L - x)$ como equação da linha elástica (observar que $y = 0$ para $x=0$ e para $x=L$).

$$y = A \cdot x \cdot (L - x) = A \cdot (x \cdot L - x^2)$$

$$y' = A \cdot (L - 2 \cdot x)$$

$$y'' = A \cdot (-2)$$

, substituindo na expressão para cálculo de P_{cr} , vem

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I \int_0^L 4 \cdot A^2 \cdot dx}{\int_0^L A^2 \cdot (L - 2 \cdot x)^2 \cdot dx} = \frac{E \cdot I \cdot 4 \cdot L}{\int_0^L (L^2 - 4 \cdot L \cdot x + 4 \cdot x^2) \cdot dx} = \frac{E \cdot I \cdot 4 \cdot L}{L^3 - \frac{4 \cdot L \cdot L^2}{2} + \frac{4 \cdot L^3}{3}} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \frac{4}{1 - 2 + \frac{4}{3}}$$

$$P_{cr} = 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

Exemplo 3: No exemplo anterior, observamos que, a função escolhida para a deformada resultou em uma curvatura constante implicando em um resultado pouco aproximado). Experimentemos, agora, a função y para a curvatura e não para a deformada.

$$y'' = A \cdot x \cdot (L - x) = A \cdot (x \cdot L - x^2)$$

$$y' = A \cdot \left(\frac{x^2 \cdot L}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right)$$

$$y = A \cdot \left(\frac{x^3 \cdot L}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \rightarrow \frac{L}{6} - \frac{L}{12} + C_1 \cdot L = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{L^3}{12}$$

desta forma, a função da deformada fica:

$$y(x) = \frac{A}{12} \cdot \left(2 \cdot x^3 \cdot L - x^4 - \frac{L^3}{12} \cdot x \right)$$

$$y'(x) = \frac{A}{12} \cdot (6 \cdot x^2 \cdot L - 4 \cdot x^3 - L^3)$$

$$y''(x) = A \cdot (x \cdot L - x^2)$$

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I \cdot \int_0^L A^2 \cdot (x \cdot L - x^2)^2 \cdot dx}{\frac{1}{12^2} \int_0^L A^2 \cdot (6 \cdot x^2 \cdot L - 4 \cdot x^3 - L^3)^2 \cdot dx}$$

$$P_{cr} = E \cdot I \cdot \frac{12^2 \cdot \int_0^L (x^2 \cdot L^2 + x^4 - 2 \cdot x \cdot L \cdot x^2) \cdot dx}{\int_0^L (36 \cdot x^4 \cdot L^2 + 16 \cdot x^6 + L^6 - 48 \cdot x^5 \cdot L - 12 \cdot x^2 \cdot L^4 + 8 \cdot x^3 \cdot L^3) \cdot dx}$$

integrando, desenvolvendo e simplificando, vem

$$P_{cr} = \frac{168}{17} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} = 9,88 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

Observa-se um resultado muito próximo do encontrado analiticamente (problema de Euler)

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} = 9,87 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

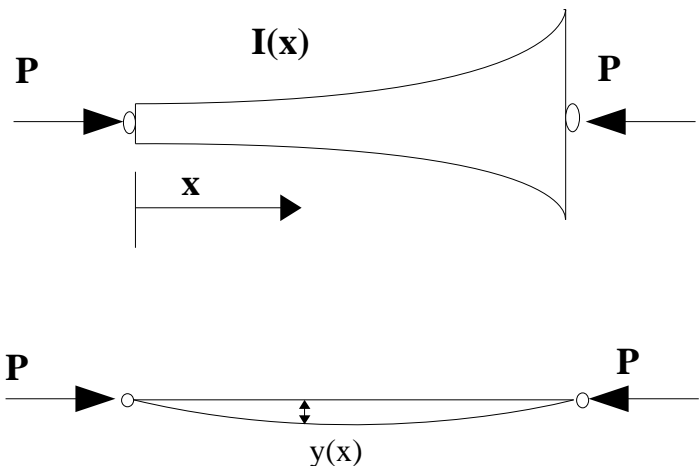
Processo aproximado – Vianello (barras de seção variável)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{E \cdot I(x)} \cdot y = 0$$

$$\frac{1}{I}(x) = \frac{1}{I_c} \cdot f(x)$$

$$k^2 = \frac{P}{e \cdot I_c}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot f(x) \cdot y = 0$$



O problema é determinar o menor valor de **k** que satisfaça a equação anterior. A solução é encontrada por aproximações sucessivas

Procedimento:

1- adotar uma 1ª aproximação para y
 $y_1(x)$ atende às condições de contorno

2- Integrar a equação diferencial

$$y_2(x) = -k^2 \cdot \iint f(x) \cdot y_1(x) \cdot dx^2$$

y_2 é uma segunda aproximação

3- verificar a proporcionalidade entre y_1 e y_2 como será explicado mais adiante

4- integrar a equação diferencial novamente

$$y_3(x) = -k^2 \cdot \iint f(x) \cdot y_2(x) \cdot dx^2$$

5- verificar a proporcionalidade entre y_2 e y_3

6- repetir os procedimentos 4 e 5 sucessivamente até que seja encontrada uma boa aproximação (proporcionalidade entre as funções)

- verificação da proporcionalidade entre as funções:

se $k^2 = \frac{y_i(x)}{\iint f(x) \cdot y_i(x) \cdot dx^2} = \text{constante em todos os pontos da barra, então o problema estará resolvido e}$

$$P_{cr} = k^2 \cdot E \cdot I_c$$

É possível demonstrar que o processo é convergente e conduz ao menor valor não nulo de k

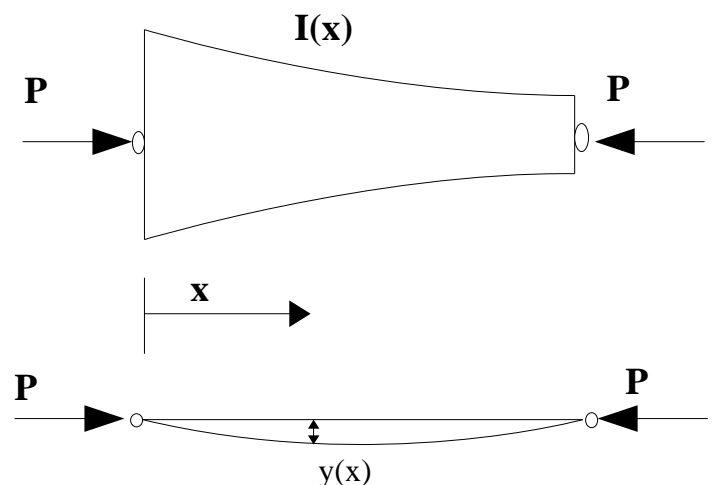
Exemplo:

Calcular a carga crítica para a barra bi-rotulada com inércia variando linearmente de I_c a $I_c/2$

solução:

$$I(x) = \frac{I_c}{1 + \frac{x}{L}}, \quad \frac{1}{I(x)} = \frac{1}{I_c} \cdot \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

assim, $f(x) = 1 + \frac{x}{L} = \frac{1}{L} \cdot (L + x)$



FLAMBAGEM

adotando como deformada a função $y_1(x) = a \cdot x \cdot (L-x)$, que atende às condições de extremidade $y(0) = y(L) = 0$.

$$y_2(x) = -k^2 \cdot \iint f(x) \cdot y_1(x) \cdot dx^2$$

$$y_2(x) = -k^2 \cdot \iint \left[\frac{1}{L} \cdot (L-x) \right] \cdot [a \cdot x \cdot (L-x)] \cdot dx^2$$

$$y_2(x) = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \iint x \cdot (L+x) \cdot (L-x) dx^2 = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \iint x \cdot (L^2 - x^2) dx^2$$

$$y_2(x) = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \iint (L^2 \cdot x - x^3) dx^2 = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \int \left(\frac{L^2 \cdot x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C_1 \right) dx$$

$$\boxed{y_2 = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \left(\frac{L^2 \cdot x^3}{6} - \frac{x^5}{20} + C_1 \cdot x + C_2 \right)}$$

condições de extremidade:

$$y_2(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$y_2(L) = 0 \rightarrow \frac{L^5}{6} - \frac{L^5}{20} + C_1 \cdot L = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-7 \cdot L^4}{60}$$

assim,

$$y_2(x) = \frac{-k^2 \cdot a}{L} \cdot \left(\frac{L^2 \cdot x^3}{6} - \frac{x^5}{20} - \frac{7 \cdot L^4}{60} \cdot x \right) \text{ ou}$$

$$y_2(x) = -\frac{k^2 \cdot a}{60 \cdot L} \cdot (10 \cdot L^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^5 - 7 \cdot L^4 \cdot x)$$

verificação da proporcionalidade entre $y_2(x)$ e $y_1(x)$

$$k^2 = -\frac{a \cdot x \cdot (L-x)}{\frac{a}{60 \cdot L} \cdot (10 \cdot L^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^5 - 7 \cdot L^4 \cdot x)} = -\frac{60 \cdot L \cdot (L-x)}{10 \cdot L^2 \cdot x^2 - 3 \cdot x^4 - 7 \cdot L^4}$$

$$x=0 \rightarrow k^2 = \frac{8,57}{L^2}$$

$$x=0,25L \rightarrow k^2 = \frac{7,05}{L^2}$$

$$x=0,50L \rightarrow k^2 = \frac{6,40}{L^2}$$

$$x=0,75L \rightarrow k^2 = \frac{6,45}{L^2}$$

$$\rightarrow x=L \rightarrow k^2 = \frac{7,5}{L^2}$$

observa-se que ao longo da barra o valor de $k^2 \cdot L$ varia entre 6,4 e 8,57

tomando agora, como expressão da deformada, a obtida para $y_2(x)$

$$y_2(x) = A \cdot (10 \cdot L^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^5 - 7 \cdot L^4 \cdot x)$$

$$y_3(x) = -k^2 \cdot A \cdot \iint \left[\frac{1}{L} \cdot (L-x) \cdot (7 \cdot L^4 \cdot x - 10 \cdot L^2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^5) \right] \cdot dx^2$$

integrando, desenvolvendo e simplificando ...

$$y_3(x) = -\frac{k^2}{L} \cdot \left(\frac{7 \cdot L^5}{6} \cdot x^3 + \frac{7 \cdot L^4}{12} \cdot x^4 - \frac{10 \cdot L^3}{20} \cdot x^5 - \frac{10 \cdot L^2}{30} \cdot x^6 + \frac{3 \cdot L}{42} \cdot x^7 + \frac{3}{56} \cdot x^8 - \frac{25 \cdot L^7}{24} \cdot x \right)$$

verificação da proporcionalidade entre $y_2(x)$ e $y_3(x)$

$$k^2 = -\frac{7 \cdot L^4 \cdot x - 10 \cdot L^2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^5}{\frac{1}{L} \cdot \left(-\frac{25 \cdot L^7}{24} \cdot x + \frac{7 \cdot L^5}{6} \cdot x^3 + \frac{7 \cdot L^4}{12} \cdot x^4 - \frac{10 \cdot L^3}{20} \cdot x^5 - \frac{10 \cdot L^2}{30} \cdot x^6 + \frac{3 \cdot L}{42} \cdot x^7 + \frac{3}{56} \cdot x^8 \right)}$$

$$x=0 \rightarrow k^2 \cdot L^2 = 6,72$$

$$x=0,25L \rightarrow k^2 \cdot L^2 = 6,64$$

$$x=0,5L \rightarrow k^2 \cdot L^2 = 6,54$$

$$x=0,75L \rightarrow k^2 \cdot L^2 = 6,51$$

$$x=L \rightarrow k^2 \cdot L^2 = 6,56$$

tomando um valor médio $k^2 \cdot L^2 = 6,59 \rightarrow$

$$P_{cr} \approx \frac{6,59 \cdot E \cdot I_c}{L^2}$$

Flambagem Inelástica:

A expressão da tensão crítica de flambagem vista no sub-ítem anterior somente é válida para tensões inferiores ao limite de proporcionalidade do material, isto é,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad .$$

Da condição $\sigma_{cr} = \sigma_p$, determinamos $\lambda = \lambda_r$, isto é,

$$\lambda_r = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad .$$

Este é o índice de esbeltez limite de flambagem elástica - valor de λ além do qual a flambagem é elástica.

Se $\lambda < \lambda_r$, a flambagem, se houver, será inelástica, isto é, $\sigma_{cr} > \sigma_p$.

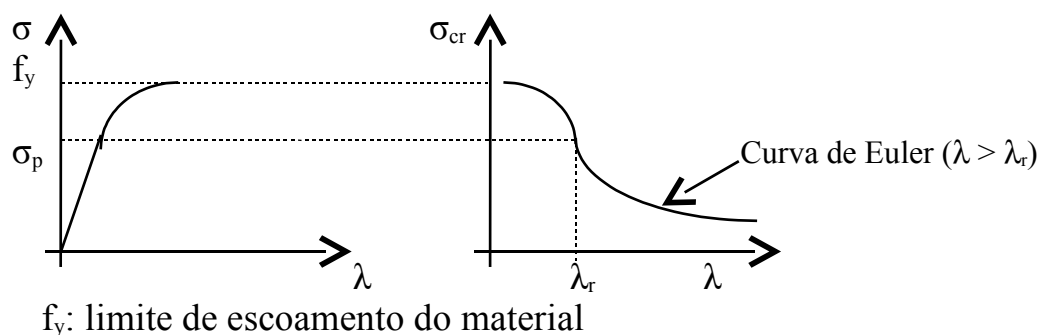


Figura 06

Várias teorias já foram propostas para a avaliação da tensão crítica de flambagem inelástica. Nenhuma delas, porém é universal. **Cada norma técnica adota a que lhe parece mais conveniente.** Uma das mais comuns é

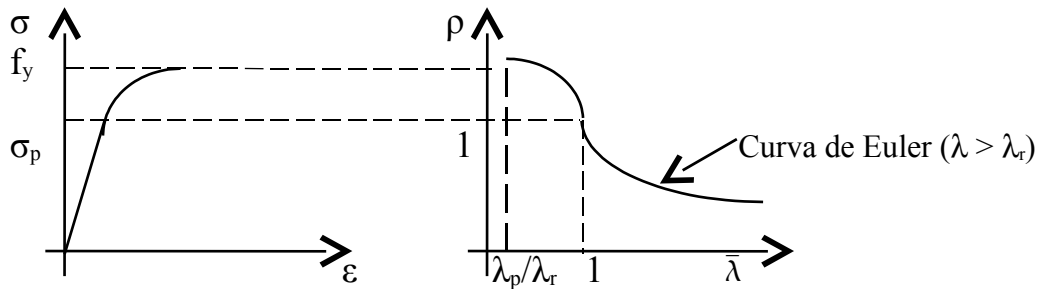
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E_{red}}{\lambda^2} \quad ,$$

onde E_{red} é o chamado **módulo de elasticidade reduzido** do material, também possuindo valores diferentes, de acordo com a teoria adotada.

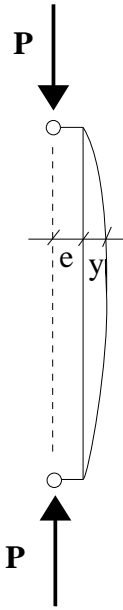
Se a barra comprimida escoar antes de flambar, isto é, de $\sigma_{cr} > f_y$, dizemos que se trata de uma “coluna curta”. Isto acontece se o seu índice de esbeltez é inferior a um certo limite λ_p , em geral determinado experimentalmente. Teoricamente, a obtenção de λ_p

seria feita a partir da condição $\sigma_{cr} = f_y$, porém como a tensão crítica de flambagem inelástica é, geralmente, obtida por processos semi-empíricos, λ_p também o é.

Modernamente, as normas técnicas trabalham com grandezas adimensionais denominadas $\rho = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_p}$ e $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_r} = \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sigma_{cr}}}$. ρ é a *tensão crítica relativa* e $\bar{\lambda}$ é o *índice de esbeltez relativo*. A curva de flambagem, portanto, é



Carga Excêntrica – fórmula secante



Seja a barra bi-rotulada da figura ao lado submetida a uma força de compressão P com uma excentricidade e .

O momento fletor em uma seção qualquer, após a deformação, será:

$$M = -P \cdot (y + e)$$

Usando a equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} = -\frac{P}{E \cdot I} \cdot y - \frac{P}{E \cdot I} \cdot e$$

fazendo $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$, vem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = -k^2 \cdot e \quad (\text{equação diferencial não homogênea})$$

A solução geral da homogênea é: $y = A \cdot \text{sen}(kx) + B \cdot \text{cos}(kx)$

Uma solução particular da não homogênea: $y = -e$

A solução geral fica, então: $y = A \cdot \text{sen}(kz) + B \cdot \text{cos}(kx) - e$

Condições de contorno (extremidade):

$$y(0) = 0 \quad , \quad B = e$$

$$y(L) = 0 \quad , \quad A \cdot \text{sen}(kL) = e[1 - \text{cos}(kL)]$$

lembrando que $\text{sen} \alpha = 2 \text{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{cos} \frac{\alpha}{2}$ e $1 - \text{cos} \alpha = 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

$$A = \frac{e \cdot [1 - \text{cos}(kL)]}{\text{sen}(kL)} = e \cdot \frac{2 \text{sen}^2 \frac{kL}{2}}{2 \text{sen} \frac{kL}{2} \cdot \text{cos} \frac{kL}{2}}$$

$$A = e \cdot \text{tg} \frac{kL}{2}$$

então,

$$y = e \cdot \left[\operatorname{tg} \left(\frac{kL}{2} \right) \cdot \operatorname{sen}(kx) + \cos(kx) - 1 \right]$$

a flecha máxima ocorrerá no meio do vão e será:

$$y_{\max} = y \left(\frac{L}{2} \right) = e \cdot \left[\operatorname{tg} \left(\frac{kL}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{kL}{2} \right) + \cos \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right] = e \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{kL}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{kL}{2} \right)}{\cos \left(\frac{kL}{2} \right)} - 1 \right]$$

$$y_{\max} = e \left[\operatorname{sec} \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right] \quad \text{ou} \quad \boxed{y_{\max} = e \cdot \left[\operatorname{sec} \left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \cdot \frac{L}{2} \right) - 1 \right]}$$

Observa-se que $y \rightarrow \infty$ quando $\sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$

Na realidade, a flecha não alcança valor infinito mas chega a valores muito grandes, inaceitáveis, quando P atinge um determinado valor crítico (P_{cr})

$$\sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{P_{cr}}{E \cdot I} \cdot L^2 = \pi^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}}$$

da expressão anterior, $E \cdot I = \frac{P_{cr} \cdot L^2}{\pi^2}$

substituindo na expressão da flecha máxima, vem

$$y_{\max} = e \cdot \left[\operatorname{sec} \left(\sqrt{\frac{P \cdot \pi^2}{P_{cr} \cdot L^2}} \cdot \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

$$\boxed{y_{\max} = e \cdot \left[\operatorname{sec} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]}$$

A tensão máxima ocorre no ponto onde a flecha é máxima e será:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} \cdot y = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot (y_{\max} + e)}{I} \cdot c$$

$$i^2 = \frac{I}{A} \quad , \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{P}{A} \cdot \frac{(y_{\max} + e)}{i^2} \cdot c$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 + \frac{y_{m\acute{a}x} + e}{i^2} \cdot c \right]$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 + \frac{e \cdot c}{i^2} \cdot \sec \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] \quad \text{ou} \quad \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 + \frac{e \cdot c}{i^2} \cdot \sec \left(\frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \right) \right]$$

um problema interessante é determinar qual a força **P** que causa uma determinada tensão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ em um pilar que tenha um índice de esbeltez λ e com uma certa relação $\frac{e \cdot c}{i^2}$ ou seja, a partir da expressão anteriormente obtida,

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{1 + \frac{e \cdot c}{i^2} \cdot \sec \left(\frac{L_e}{2 \cdot i} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot A}} \right)}$$

cuja solução se obtém por tentativas.

Flambagem por Torção

A tensão crítica de flambagem elástica por torção para barras comprimidas cujas seções são sujeitas a empenamento é dada por

$$\sigma_{cr} = f_{ez} = \frac{\left(\frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L_{flz}} + G \cdot I_t \right)}{A \cdot r_0^2},$$

onde $r_0^2 = r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 + y_0^2$

r_x e r_y : raios de giração relativos aos eixos principais centrais da seção, x e y

x_0 e y_0 : coordenadas do CC da seção, relativas aos eixos x e y

C_w : constante de empenamento da seção

I_T : constante de torção da seção

A: área da seção

L_{flz} : comprimento de flambagem na torção - distância entre duas seções consecutivas impedidas de girar em torno do eixo da barra

E e G: módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material

Para seções com empenamento nulo ($C_w = 0$), tais como

- seções circulares e retangulares maciças,
- tubos circulares e retangulares (perfis fechados),
- perfis constituídos por chapas planas, cujas linhas médias da seção concorrem num único ponto (perfil L, perfil T, seção cruciforme, etc.),

FLAMBAGEM

$$f_{ez} = \frac{G \cdot I_t}{A \cdot r_0^2} \cdot$$

Flambagem por Flexo-Torção

A tensão crítica de flambagem elástica por flexo-torção será a menor raiz da equação

$$(\sigma_{cr} - f_{ex}) \cdot (\sigma_{cr} - f_{ey}) \cdot (\sigma_{cr} - f_{ez}) - \sigma_{cr}^2 \cdot \left[(\sigma_{cr} - f_{ex}) \cdot \left(\frac{y_0}{r_0} \right)^2 + (\sigma_{cr} - f_{ey}) \cdot \left(\frac{x_0}{r_0} \right)^2 \right] = 0 \quad .$$

Esta equação é do 3º grau. Porém, se um dos eixos principais da seção é de simetria, $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$ e a equação fica

a) se $x_0 = 0$: $(\sigma_{cr} - f_{ex}) \left\{ \left[1 - \left(\frac{y_0}{r_0} \right)^2 \right] \cdot \sigma_{cr}^2 - (f_{ey} + f_{ez}) \cdot \sigma_{cr} + f_{ey} \cdot f_{ez} \right\} = 0$

b) se $y_0 = 0$: $(\sigma_{cr} - f_{ey}) \left\{ \left[1 - \left(\frac{x_0}{r_0} \right)^2 \right] \cdot \sigma_{cr}^2 - (f_{ex} + f_{ez}) \cdot \sigma_{cr} + f_{ex} \cdot f_{ez} \right\} = 0$

Se os dois eixos são de simetria, $x_0 = y_0 = 0$ e a equação fica

$$(\sigma_{cr} - f_{ex}) \cdot (\sigma_{cr} - f_{ey}) \cdot (\sigma_{cr} - f_{ez}) = 0 \quad .$$

Observação: A tensão crítica de flambagem inelástica na flambagem por torção ou por flexo-torção também é obtida, em geral, por processos semi-empíricos.

Flambagem de Barras Fletidas

Tipo de Flambagem: Flambagem por Flexão Lateral com Torção

Barra Birrotulada Submetida a Momento Fletor Constante (Flexão Pura):



Figura 07

As seções apoiadas são supostamente impedidas de girar em torno de z.

Supondo, como no esquema acima, o eixo x sendo o eixo de flexão, esta flambagem (flexão em torno de y) somente ocorrerá se a inércia relativa a y for menor do que a inércia relativa a x, isto é, se $I_y < I_x$.

Ao flambar, a barra sofre flexão lateral (em torno de y) e torção.

FLAMBAGEM

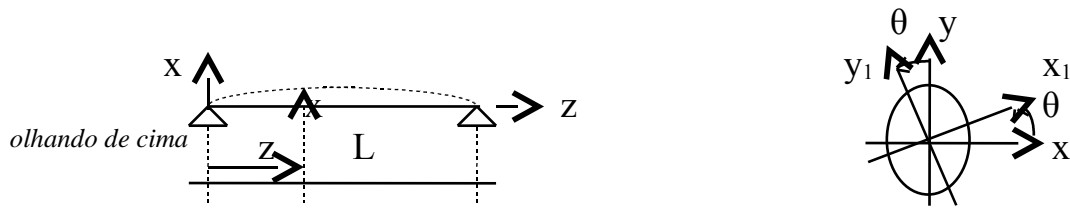


Figura 08

Consideremos que, após a torção, o momento fletor M_x seja decomposto segundo as novas posições dos eixos principais de inércia.

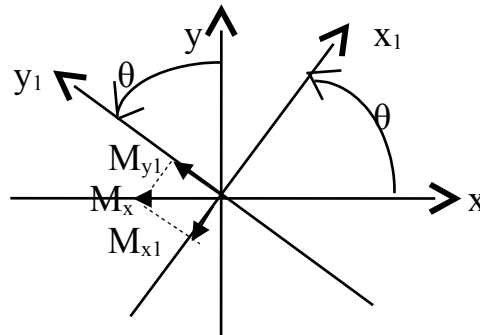


Figura 09

O momento que fará a peça fletir em torno de y_1 (nova posição de y após a torção) será:

$$M_{y1} = -M_x \cdot \text{sen} \theta \approx -M_x \cdot \theta$$

No plano x - z , após a flexão lateral, as componentes de M_x são:

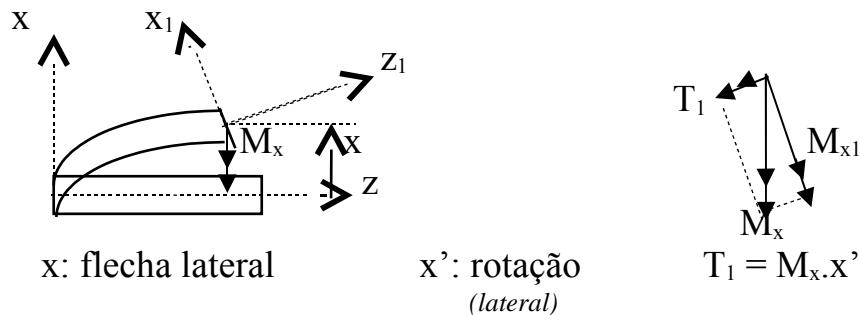


Figura 10

Seja M_0 o momento torsor (incógnito) que, eventualmente, surja em um dos apoios, no momento da flambagem. Assim, o momento torsor T numa seção genérica (distante z do apoio) será:

$$T = M_0 + T_1 = M_0 + M_x \cdot x'$$

De acordo com o que foi visto no estudo da flexão e da torção, temos:

$$E \cdot I_y \cdot x'' = M_{y1} \quad \text{e} \quad G \cdot I_t \cdot \theta' = T \quad \text{ou} \quad \text{FLAMBAGEM}$$

$$E \cdot I_y \cdot x'' = -M_x \cdot \theta \quad \text{e} \quad G \cdot I_t \cdot \theta' = M_0 + M_x \cdot x' \quad , \quad \theta' = \frac{1}{G \cdot I_t} \cdot (M_0 + M_x \cdot x')$$

$$E \cdot I_y \cdot x''' = -M_x \cdot \theta'$$

Eliminando θ nas equações acima, temos:

$$x''' + \frac{M_x}{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} \cdot (M_0 + M_x \cdot x') = 0 \quad , \quad \text{fazendo} \quad k^2 = \frac{M_x^2}{G \cdot I_t \cdot E \cdot I_y}$$

$$x''' + k^2 \cdot x' = -k^2 \cdot \frac{M_0}{M_x}$$

A solução desta equação é:

$$x = C_1 + C_2 \cdot \text{sen}(kz) + C_3 \cos(kz) - \frac{M_0}{M_x} \cdot z$$

$$x' = k \cdot C_2 \cdot \cos(kz) - k \cdot C_3 \cdot \text{sen}(kz) - \frac{M_0}{M_x}$$

$$x'' = -k^2 \cdot C_2 \cdot \text{sen}(kz) + C_3 \cdot \cos(kz)$$

Como $\theta = -\frac{E \cdot I_y}{M_x} \cdot x''$:

$$\theta = \frac{E \cdot I_y \cdot k^2}{M_x} \cdot [C_2 \text{sen}(kz) + C_3 \cdot \cos(kz)]$$

As condições de contorno da barra birrotulada são:

$$x=0 \quad \text{em} \quad z=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 0$$

$$\theta=0 \quad \text{em} \quad z=0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$x=0 \quad \text{em} \quad z=L \quad \Rightarrow \quad C_2 \cdot \text{sen}(kL) - \frac{M_0}{M_x} \cdot L = 0$$

$$\theta=0 \quad \text{em} \quad z=L \quad \Rightarrow \quad C_2 \cdot \text{sen}(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 = 0$$

Conclusão: $C_1 = C_3 = M_0 = 0$ e $C_2 \cdot \text{sen}(kL) = 0$.

A solução $C_2 = 0$ não interessa pois se $C_2 = 0$, então $x = 0$ e a barra não flete lateralmente nem torce, isto é, não há flambagem.

Da solução $\text{sen}(kL) = 0$, temos:

$$k = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro.}$$

De $k^2 = \frac{M_x^2}{G \cdot I_t \cdot E \cdot I_y}$ e $k = n \cdot L$, concluímos que

$$M_x = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t}$$

são os momentos fletores que provocam a flambagem por flexão lateral com torção numa barra birrotulada submetida a flexão pura.

O momento crítico de flambagem elástica será o valor mínimo de M_x (para $n = 1$), isto é:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} .$$

No caso geral (quaisquer condições de apoio), o momento crítico será:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L_{fl}} \cdot \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} .$$

Este momento pode ainda ser escrito em função do índice de esbeltez para flambagem por flexão em torno do eixo de menor inércia λ_y .

$$M_{cr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_y}{L_{fl}^2} \cdot G \cdot I_t} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot A \cdot r_y^2}{L_{fl}^2} \cdot G \cdot I_t} = \pi \cdot \sqrt{E \cdot \frac{A}{\lambda_y^2} \cdot G \cdot I_t} ,$$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda_y} \cdot \sqrt{E \cdot A \cdot G \cdot I_t}$$

A expressão acima é válida desde que:

- a) O momento fletor não varie ao longo da viga (flexão pura);
- b) A seção seja duplamente simétrica (a equação da linha elástica foi escrita para flexão em torno de x e de y);
- c) O empenamento da seção seja desprezível ($C_\omega = 0$).

Esta expressão pode, ainda, ser escrita de outras formas.

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda_y^2} \cdot G \cdot I_t \cdot \frac{A^2 \cdot r_0^2}{A^2 \cdot r_0^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2} \cdot \frac{G \cdot I_t}{A \cdot r_0^2} \cdot A^2 \cdot r_0^2}$$

ou

$$M_{cr} = A \cdot r_0 \cdot \sqrt{f_{ey} \cdot f_{ez}} \quad , \quad \boxed{M_{cr} = \frac{\pi \cdot A \cdot r_0}{\lambda_y} \cdot \sqrt{E \cdot f_{ez}}} .$$

Esta expressão é válida também para seções com empenamento não nulo ($C_\omega \neq 0$), se

considerarmos $f_{ez} = \frac{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L_\beta^2} + G \cdot I_t}{A \cdot r_0^2}$. Assim,

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda_y} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot A^2 \cdot r_0^2}{A \cdot r_0^2} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L_\beta^2} + G \cdot I_t \right)} = \frac{\pi}{\lambda_y} \cdot \sqrt{E \cdot A \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{r_y^2 \cdot \lambda_y^2} + G \cdot I_t \right)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda_y} \cdot \sqrt{E \cdot A \cdot G \cdot I_t \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{r_y^2 \cdot G \cdot I_t} \cdot \frac{1}{\lambda_y^2} \right)}} .$$

Obs.: Notar que se $C_\omega = 0$, a expressão do momento crítico passa a ser a anteriormente deduzida.

No caso de seção com simetria apenas em relação ao eixo normal ao de flexão (eixo y) e $C_\omega \neq 0$,

$$M_{cr} = f_{ey} \cdot A \cdot \left[\frac{-y_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{2} \right)^2 + \frac{f_{ez}}{f_{ey}} \cdot r_0^2} \right] \quad \text{ou}$$

$$\boxed{M_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda_y^2} \cdot \left[\frac{-y_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{2} \right)^2 + \frac{C_w}{I_y} + \frac{G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot A} \cdot \lambda_y^2} \right]} ,$$

onde $y_1 = \frac{1}{I_x} \cdot \int_A y \cdot (x^2 + y^2) \cdot dA - 2 \cdot y_0$;

y_0 é a ordenada do CC, relativa aos eixos centrais principais da seção;

O valor positivo da raiz quadrada é válido quando o momento fletor solicitante é positivo.

Para flexão simples (momento variando ao longo da viga), M_{cr} é sempre igual ou superior ao valor acima e sua determinação muito complexa. Se, para fins práticos, considerarmos o momento sempre constante, estaremos a favor da segurança.

Flambagem Inelástica:

A expressão do momento crítico vista no sub-ítem anterior somente é válida para tensões máximas de compressão inferiores ao limite de proporcionalidade do material, isto é, para momentos inferiores ao momento limite de flambagem elástica

$$M_r = \sigma_p W_{xc},$$

onde $W_{xc} = \frac{I_x}{y_c}$ é o módulo resistente elástico à flexão da barra,

I_x é o momento de inércia relativo ao eixo de flexão da barra e

y_c é a distancia da Linha Neutra da seção transversal ao seu ponto mais comprimido.

Da condição $M_{cr} = M_p$, determinamos $\lambda = \lambda_r$, isto é,

$$\lambda_r = \frac{\lambda_0 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \beta}} .$$

onde $\lambda_0 = \frac{\pi \cdot \sqrt{E \cdot A \cdot K_0}}{M_r}$, $\beta = \frac{4 \cdot C_w \cdot M_r^2}{I_y \cdot K_0^2}$ e $K_0 = G \cdot I_t - y_1 \cdot M_r$,

Este é o índice de esbeltez limite de flambagem elástica - valor de λ além do qual a flambagem é elástica.

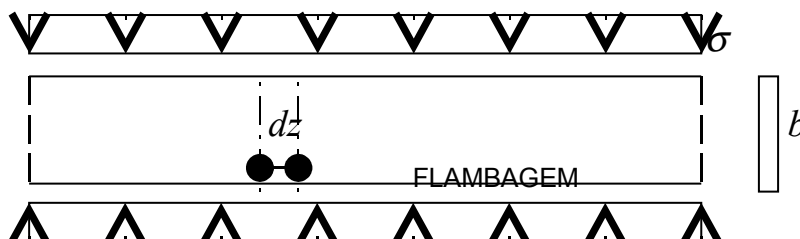
A determinação da expressão do momento crítico de flambagem inelástica e do índice de esbeltez λ_p (*abaixo do qual a seção mais solicitada da barra plastifica totalmente antes de flambar*) é feita, em geral, de forma semi-empírica, como no caso das barras comprimidas.

Flambagem de Chapas Comprimidas e Fletidas

A tensão crítica de flambagem elástica de chapas comprimidas ou fletidas é dada por

$$\sigma_{cr} = k \cdot \sigma_e ,$$

onde k é um parâmetro que depende de propriedades geométricas da chapa, das suas condições de apoio e do tipo de solicitação a que está submetida e σ_e é a tensão crítica de flambagem elástica de uma chapa de comprimento infinito, comprimida conforme a figura abaixo.



$$\sigma$$

Esta tensão vale

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{(1-\nu^2) \cdot \lambda_z^2},$$

onde $\lambda_z = \frac{L_{fl}}{r_z} = \frac{b}{r_z}$ é o índice de esbeltez do elemento de comprimento b e seção transversal retangular de dimensões $t \times dz$,

$r_z = \sqrt{\frac{dI_z}{dA}}$ é o raio de giração desta seção em relação ao eixo z ,

$dA = t \cdot dz$ é a área desta seção,

$dI_z = \frac{t^3 \cdot dz}{12}$ é o momento de inércia desta seção relativo ao eixo z e

ν é o Coeficiente de Poisson do material.

Assim, $\lambda_z = \frac{b}{t} \cdot \sqrt{12} = \lambda \cdot \sqrt{12}$ e $\sigma_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot \lambda^2}$, onde $\lambda = \frac{b}{t}$ é considerado o índice de esbeltez da chapa. Assim,

$$\sigma_{cr} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot \lambda} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot D}{t \cdot b^2},$$

onde $D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$ é a rigidez à flexão da chapa.

Valores de k

A tensão crítica de flambagem inelástica é também obtida por processo semi-empírico.